

Normály ve vrcholech trojúhelníkových sítí

Libor Váša

1	Úvod, vymezení tématu.....	3
2	Používané metody	3
2.1	Metoda M1 (metoda kružnice/kulové plochy)	3
2.1.1	E2 případ	3
2.1.2	E3 případ	5
2.2	Metoda M2 (Gouraud)	6
2.2.1	E2 případ	6
2.2.2	E3 případ	7
2.3	Metoda M3 (Thurmer...)	8
2.3.1	E2 případ	8
2.3.2	E3 případ	9
2.4	Metoda M4 (Max)	9
2.4.1	E2 případ	9
2.4.2	E3 případ	10
2.5	Metoda M5 (Metoda vrcholového úhlu)	10
2.5.1	E2 případ	10
2.5.2	E3 případ	11
2.6	Další metody	12
3	Metody testování	12
3.1	Testování přesnosti.....	12
3.1.1	E2 Případ	13
3.1.2	E3 případ	13
3.2	Testování numerické stability	13
3.3	Testování rychlosti	13
4	Použitá literatura	14

1 Úvod, vymezení tématu

Trojúhelníkové sítě jsou v současné době velmi obvyklou formou reprezentace trojrozměrných objektů a modelů, oblíbenou pro svou snadnou přístupnost a modifikovatelnost. Existuje značné množství metod zobrazení takovýchto sítí, většina z nich však kromě samotných souřadnic vrcholů sítě vyžaduje i další informace o sítí a normála (kolmice) ve vrcholu je velmi častým případem takovéto dodatečné informace.

Je nutno si uvědomit že trojúhelníková síť sama zjevně žádnou matematicky definovanou normálu ve vrcholu nemá (ve vrcholech sítě není spojitá první derivace, není tedy možno určit ani gradient ani normálu) a proto normála kterou hledáme není normálou k trojúhelníkové síti samotné, ale k objektu, jenž je sítí reprezentován.

Je dále zřejmé že takovéto hledání normály nemůže nikdy dávat stoprocentně správné výsledky, přinejmenším proto, že z sítě trojúhelníků není možno jednoznačně určit původní objekt (obecně je možné že z několika různých objektů vznikne stejnou metodou triangulace stejná trojúhelníková síť, která by však měla mít ve vrcholech různé normály).

Cílem tohoto materiálu je popsat některé známé metody určování normály ve vrcholech lomených čar (2D případ) a trojúhelníkových sítí (3D případ téže úlohy), navrhnout modifikace těchto metod a navrhnout pokud možno obecný postup testování takovýchto metod, jejich kvality, rychlosti, stability (robustnosti). Dále bude navržen způsob jak porovnávat metody vzájemně.

K problematice bude přistupováno z pozice programátora který má za úkol implementovat příslušné metody, zvláštní zřetel tedy bude kladen na „počítačové“ aspekty předkládaných metod.

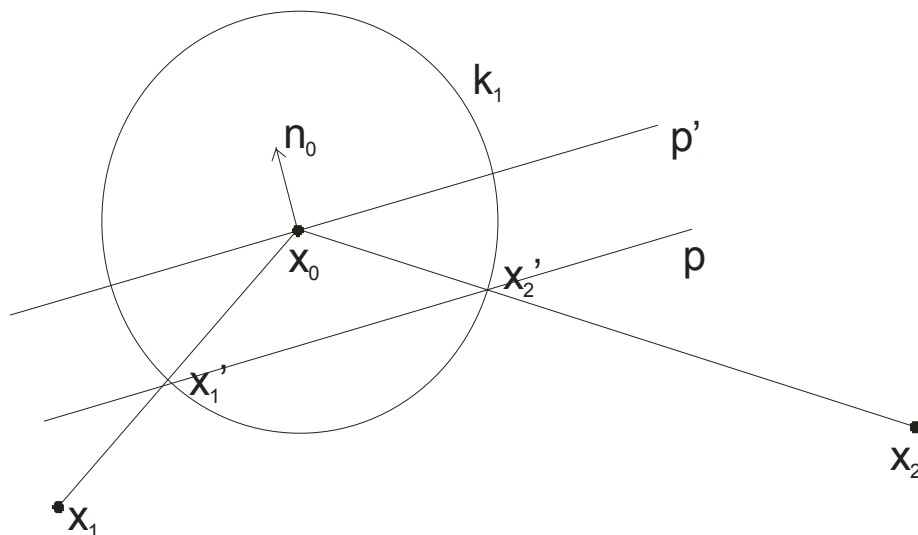
2 Používané metody

2.1 Metoda M1¹ (metoda kružnice/kulové plochy)

Myšlenka: Normála je kolmicí k nadrovině tečné v bodě x_0 . Tuto nadrovinu je možno aproximovat body na hranách incidentujících s x_0 jejichž vzdálenost od x_0 je konstantní.

2.1.1 E2 případ

Tečnou přímku aproximujeme dvěma body, jak ukazuje obr. 1:



Postup:

Určujeme normálu v bodě x_0 , body x_1 a x_2 jsou sousedními body lomené čáry. Zkonstruujeme kružnici k_1 o poloměru R (pro současnou úvahu menším než obě ramena). Získáme průsečíky x_1' a x_2' , jimiž proložíme přímku p , jejímž posuvem do bodu x_0 získáme aproximaci tečny původní křivky. Směr kolmý k takto získané tečně prohlásíme za směr normály v bodě x_0 .

Nejprve je nutno vypočíst souřadnice bodů x_1' a x_2' . Pro tento úkon existuje stabilní algoritmus, který bude v obměněné podobě použit pro E3 případ a jehož bude využito i v metodě M5 (metoda vrcholového úhlu).

¹ Značení převzato od p. prof. Skaly

Posuneme souřadný systém do bodu x_0 . Potom platí:

Rovnice kružnice:

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} - R = 0$$

Rovnice ramen:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0).t$$

můžeme definovat směr k bodu x_i následovně:

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0$$

potom pro ramena platí:

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{x}_i$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{s}_i.t$$

a z rovnice kružnice je možno odvodit:

$$\mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i.t^2 - R^2 = 0$$

$$t_i = \pm \sqrt{\frac{R^2}{\mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i}} \quad (1)$$

(chceme-li bod na úsečce $x_0 x_i$, pak přijímáme kladné znaménko. Z hlediska směru výsledné normály by se ale nic nezměnilo ani kdybychom pokaždé přijali řešení se záporným znaménkem)

uvědomíme-li si že po přesunu počátku je směr \mathbf{s}_i číselně roven souřadnicím x_i pak je vidět že

$$r_i = \sqrt{x_{ix}^2 + x_{iy}^2}$$

$$\mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i = \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_i = x_{ix}^2 + x_{iy}^2 = r_i^2$$

kde r_i je velikost ramene z bodu x_0 do bodu x_i . Dosazením do (1) tedy získáváme:

$$t_i = \frac{R}{r_i}$$

a pro souřadnici bodu x_i pak platí:

$$x_i' = s_i.t_i = x_i \frac{R}{r_i}$$

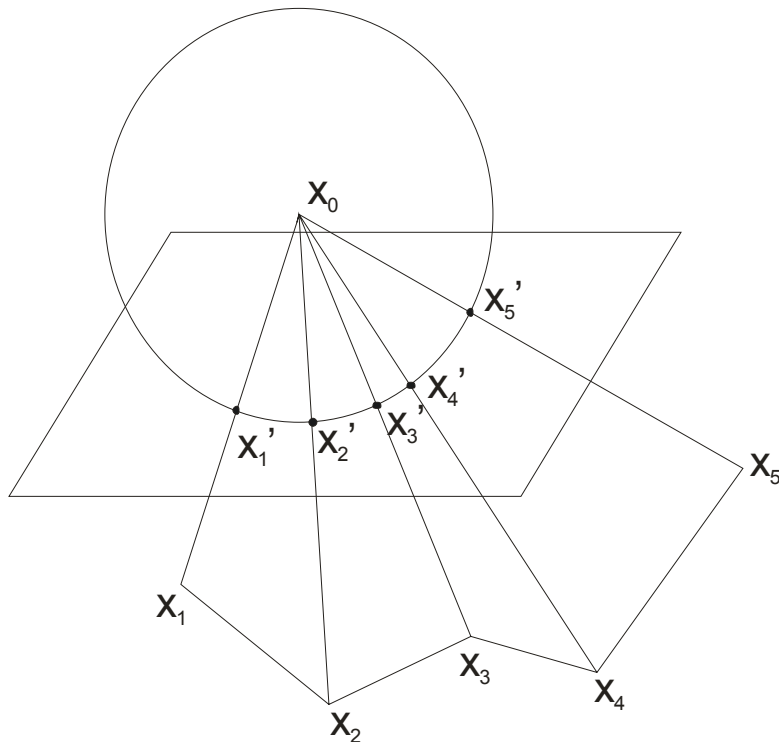
Nakonec je ještě nutno udělat krok inverzní k původnímu posuvu souřadného systému. Tím získáme souřadnice bodů x_1' a x_2' . Z nich získáme směrnici přímky p (řešíme rovnice $ax_i + by_i = 0$ kde $i=0;1$ – získáme koeficienty a a b), kterou pak dodefinujeme tak, aby procházela bodem x_0 (řešíme rovnici $ax_0 + by_0 + c = 0$ pro neznámou c). Dodefinování je nutné pouze chceme-li znát rovnici tečny, směr normály můžeme určit už z pouhého směru tečny jako směr na tečnu kolmý.

Z obrázku je rovněž zřetelné, že body x_0 , x_1' a x_2' tvoří rovnoramenný trojúhelník, pro nějž platí že kolmice na základnu (má směr tečny) je totožná s osou protilehlého úhlu. Je tedy možno konstatovat že vzniklá normála má směr osy úhlu sevřeného rameny z bodu x_0 . Tato úvaha má však smysl pouze v E2.

Čas nutný pro výpočet normál touto metodou je lineárně závislý na počtu vrcholů lomené čáry, jedná se tedy o výpočetní složitost $O(n)$. Numerickou nestabilitu by mohly způsobovat délky ramen v podílu R/r_i , čemuž lze předcházet vhodnou volbou velikosti R . Za současného přehledu o metodě nevidím jiný důvod proč by se neměla chovat numericky stabilně.

2.1.2 E3 případ

Tečnou nadrovinou není v tomto případě přímka, ale rovina. Aproximujeme ji podobným způsobem jako v předchozím případě, na místo kružnice určujeme body s konstantní vzdáleností od vrcholu x_i pomocí kulové plochy.



Body x'_i můžeme určit velmi podobně jako v E2 případě, totiž:

Posuneme-li souřadný systém do bodu x_0 pak platí

Rovnice kružnice:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} - R = 0$$

Rovnice ramen:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0).t$$

definujeme směr k bodu x_i následovně:

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0$$

potom pro ramena platí:

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{x}_i$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{s}_i.t$$

a z rovnice kružnice je možno odvodit:

$$\mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i.t^2 - R^2 = 0$$

$$t_i = \pm \sqrt{\frac{R^2}{\mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i}} \quad (1)$$

(chceme-li bod na úsečce $x_0 x_i$, pak přijímáme kladné znaménko. Z hlediska směru by se ale nic nezměnilo ani kdybychom pokaždé přijali řešení se záporným znaménkem, otázkou by však byla orientace)

uvědomíme-li si že po přesunu počátku je směr s_i číselně roven souřadnicím x_i pak je vidět že

$$r_i = \sqrt{x_{ix}^2 + x_{iy}^2 + x_{iz}^2}$$

$$\mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i = \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_i = x_{ix}^2 + x_{iy}^2 + x_{iz}^2 = r_i^2$$

kde r_i je velikost ramene z bodu x_0 do bodu x_i . Dosazením do (1) tedy získáváme:

$$t_i = \frac{R}{r_i}$$

a pro souřadnici bodu x_i' pak platí:

$$x_i' = s_i \cdot t_i = x_i \frac{R}{r_i}$$

Stejně jako v E2 případě i tentokrát je nutno provést posunutí do původního souřadného systému.

Na rozdíl od předchozího případu je však vzniknuvší situace komplikovanější. Zatímco v E2 incidoval každý vrchol (kromě krajních) s právě dvěma jinými, v E3 inciduje vyšetřovaný vrchol se třemi a více vrcholy. Z toho vyplývá že z uvedené metody získáváme množinu nejméně tří bodů x_i' . Jsou-li právě tři (minimální případ) pak přesně určují tečnou rovinu, je-li jich však více, pak se jedná o pře určenou soustavu kterou je nutno řešit některou přibližnou metodou.

Na úlohu je možno pohlížet jako na proložení bodů rovinou, je tedy možno použít různých metod regrese, lineárních popř. nelineárních.

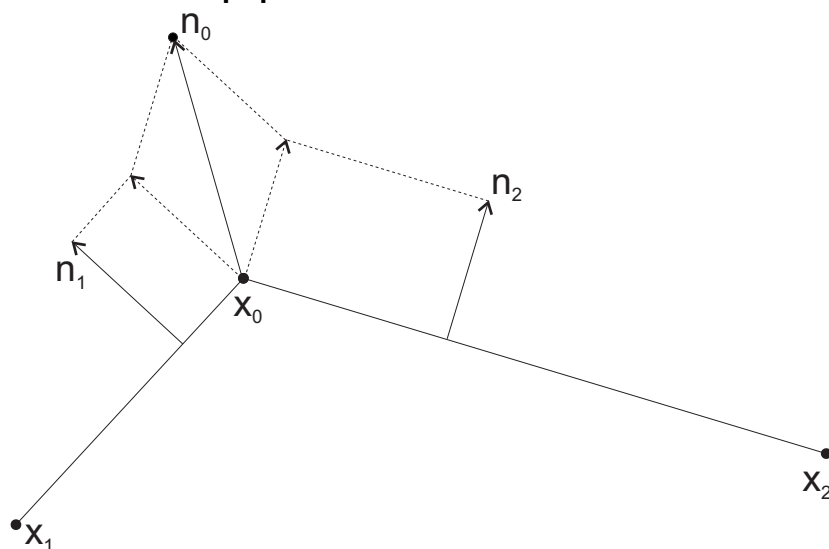
Doba výpočtu normál metodou M1 v E3 je lineárně závislá na počtu vyšetřovaných vrcholů a počtu vrcholů s nimiž vyšetřovaný vrchol inciduje (předpokládáme že seznam těchto vrcholů známe, tj. nemusíme jej určovat). V nejhorším případě může každý vrchol incidovat s každým, tudíž výpočetní složitost je v nejhorším případě $O(n^2) + \langle \text{složitost regrese} \rangle$, trojúhelníková síť se všemi spojnicemi však není obvyklá, naopak se dá očekávat že počet incidentních vrcholů bude konstantní. Očekávaná složitost je tedy $O(n) + \langle \text{složitost regrese} \rangle$.

Podobně jako v E2 může i v E3 vzniknout nestabilita při nevhodně zvoleném poloměru R . Ten by měl být volen podobně velký jako délky ramen r_i . Další nestabilitu metody může způsobit zvolená metoda regrese.

2.2 Metoda M2 (Gouraud)

Myšlenka: Trojúhelníková síť sama sice nemá přímo definované normály ve vrcholech, je však možno určit normály k jednotlivým trojúhelníkům a normály ve vrcholech pak určit z nich.

2.2.1 E2 případ



Vypočteme normály k ramenům x_1x_0 a x_0x_2 podle vztahů

$$n_1 = [-(x_{0y} - x_{1y}), x_{0x} - x_{1x}]$$

$$n_2 = [-(x_{2y} - x_{0y}), x_{2x} - x_{0x}]$$

a normálu ve vrcholu pak určíme jako průměr

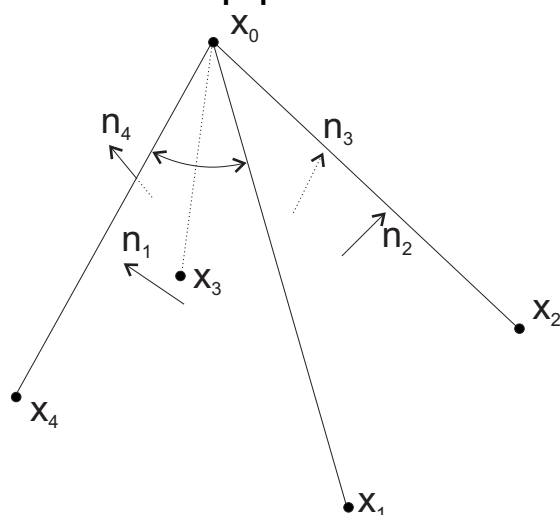
$$n_0 = \frac{n_1 + n_2}{2}$$

Někdy se navíc používá normalizace, výsledná normála je potom

$$n_0 = \frac{1}{2} \frac{n_1 + n_2}{|n_1 + n_2|}$$

Výpočetní doba je v E2 úměrná počtu vyšetřovaných vrcholů, jedná se tedy o výpočetní složitost $O(n)$. Metoda by teoreticky neměla mít potíže s numerickou stabilitou.

2.2.2 E3 případ



V E3 se namísto součtu dvou normál provádí součet normál všech trojúhelníků incidujících s vyšetřovaným vrcholem. Těch je právě tolik kolik hran z vrcholu vychází. Normálu k trojúhelníku určíme jako vektorový součin směrů dvou hran, např. normálu k trojúhelníku $x_1x_2x_0$ určíme jako

$$n_2 = (x_1 - x_0) \times (x_2 - x_0)$$

Aby bylo možno takovýto vzorec použít je nutné, aby byly trojúhelníky správně orientovány, jinak by bylo nutno dalším postupem určit orientaci takto získané normály k trojúhelníku.

Zdroj [2] navíc upozorňuje na možnou numerickou nestabilitu této metody výpočtu normály v případě že zvolená ramena jsou téměř rovnoběžná. V takovém případě vychází vektorový součin velmi malý, což může způsobit numerické potíže v dalších výpočtech. Jako lepší postup uvádí zdroj robustní metodu Martina Newella. Ta je zavedena pro obecnou stěnu s N vrcholy následovně¹:

$$n_x = \sum_{i=0}^{N-1} (x_{iy} - x_{next(i)y})(x_{iz} + x_{next(i)z})$$

$$n_y = \sum_{i=0}^{N-1} (x_{iz} - x_{next(i)z})(x_{ix} + x_{next(i)x})$$

$$n_z = \sum_{i=0}^{N-1} (x_{ix} - x_{next(i)x})(x_{iy} + x_{next(i)y})$$

¹ Značení bylo upraveno aby odpovídalo zde zavedeným konvencím.

kde $next(j) = (j + 1) \bmod N$. Tato metoda poskytuje stabilní výsledky a je obecně použitelná pro planární polygony¹. Její algoritmická složitost je pro konstantní N (pro použití v trojúhelníkových sítích platí $N=3$) $O(n)$, tj. lineárně závislá na počtu vyšetřovaných normál. Ze zavedených vzorců je zřejmé, že za lepší numerickou stabilitu jsme zaplatili vyšší konstantou lineární složitosti, nicméně řád složitosti byl zachován.

Ideou pro další rozpracování zůstává použití Newellovy metody v E3 případě metody M1 pro určení normály k množině bodů x_i , na niž bychom pohlíželi jako na aproximaci planárního polygonu.

Normálu ve vrcholu x_0 pak určíme jako průměr normál k trojúhelníkům:

$$n_0 = \frac{\sum_{i=1}^m n_i}{m}$$

získanou normálu můžeme chtít dále normalizovat.

$$n_0 = \frac{\sum n_i}{\left| \sum n_i \right|}$$

2.3 Metoda M3 (Thurmer...)

Myšlenka: Metoda M2 určuje normály z normál přilehlých ramen/stěn, ale nebere v potaz fakt, že se na výsledné normále nemusejí podílet stejnou měrou. Zavedme několik pohledů jak „ohodnotit“ vliv jednotlivých normál na normálu ve vrcholu a tento vliv zahrňme do výpočtu.

2.3.1 E2 případ

Normálu ve vrcholu zavedeme podobně jako v metodě M2:

$$n_0 = \frac{w_1 n_1 + w_2 n_2}{w_1 + w_2}$$

po normalizaci

$$n_0 = \frac{w_1 n_1 + w_2 n_2}{|w_1 n_1 + w_2 n_2|}$$

kde w_1 a w_2 jsou váhy přiřazené ramenům r_1 a r_2 . Ty je možno určit například jako relativní délky ramen

$$w_i = \frac{r_i}{r_1 + r_2}$$

pokud předpokládáme že delší rameno by mělo mít větší podíl na normále ve vrcholu. Je však možný i opačný přístup, totiž že kratší rameno znamená „hustější vzorkování“ a proto by měla být jeho normála započtena s větší vahou. Ta by potom mohla vypadat jako převrácená hodnota předchozího případu:

$$w_i = \frac{r_1 + r_2}{r_i}$$

Je zřejmé že tyto dva přístupy jsou v přímém sporu a bude otázkou testování metod který z nich se ukáže jako výhodnější.

¹ V počítačové praxi se obvykle za planární považují pouze trojúhelníky, Newellova metoda však údajně zvládá i objekty planární jen částečně.

2.3.2 E3 případ

Vzorec pro výpočet váženého průměru normál jednotlivých trojúhelníků je pouhým zobecněním z E2, tedy

$$n_0 = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} w_i n_i}{\sum_{i=0}^{N-1} w_i}$$

po normalizaci

$$n_0 = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} w_i n_i}{\left| \sum_{i=0}^{N-1} w_i n_i \right|}$$

Pro výpočet normál k jednotlivým trojúhelníkům můžeme použít vektorový součin nebo Newellovu metodu, obojí stejně jako u metody M2.

V E3 se otevírají širší možnosti jak určit váhu normál. Může záviset na:

1. obsahu příslušného trojúhelníka. Vystává podobná otázka jako v E2, totiž zda většímu obsahu trojúhelníka by měla příslušet větší (protože má větší podíl na ploše okolí vrcholu) nebo menší (protože menší trojúhelník lépe kopíruje původní tvar objektu) váha. Proti přímé úměře (kterou však používá všechna použitá literatura) hovoří její řádově horší výsledky (přesnější data uvádí [3]) a naopak ve prospěch nepřímé úměry hovoří analogie s Maxovou myšlenkou (viz dále) která rovněž kratším hranám (odpovídají menším plochám) přisuzuje větší vliv na normálu ve vrcholu.
2. velikosti vrcholového úhlu u vrcholu x_0 daného trojúhelníka (tento případ je v [3] označován jako Thurmerova metoda)
3. ...
4. vhodné kombinaci předchozích.

Obecněji lze rovněž metodu M2 chápat jako speciální případ metody M3 pro níž je určeno

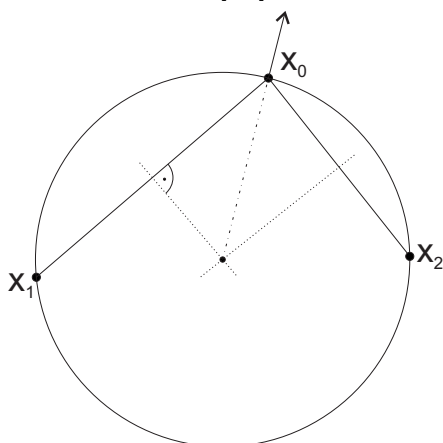
$$w_i = 1 \quad i = 0, 1, \dots, (N-1)$$

Výpočetní složitost metody M3 odpovídá metodě M2 + výpočetní složitosti všech vah. Rovněž numerická stabilita by měla být stejná, nicméně i jí může ovlivnit stabilita výpočtu vah.

2.4 Metoda M4 (Max)

Myšlenka: Lomená čára v E2 aproximuje neznámou hladkou křivku. Tři body dostatečně určují kružnici, která může být blízká aproximované křivce, proto i její tečna může být aproximované tečně blízká.

2.4.1 E2 případ



Jak je zřejmé z obrázku, metoda M4 vychází z kružnice opsané třem bodům vyšetřované lomené čáry. Střed této kružnice se určí jako průsečík os stran a je rovněž použit jako druhý bod určující směr normály.

Metoda se dostává do problémů v případě bodů ležících na přímce. Takový stav samotný je možno řešit poměrně snadno tím že za směr normály (z definice) prohlásíme směr kolmý k přímce na níž se body nacházejí. Takový případ je však v počítačové praxi málo pravděpodobný¹, proto bude zřejmě nutno zavést určité tolerance v rámci kterých budou body považovány za v přímce ležící (k tomuto účelu se může hodit determinantový test pravotočivosti – je možno vypočítaný determinant testovat na blízkost nule).

Do dalších problémů se metoda dostává v případech kdy body (ani v rámci určené přesnosti) neleží na jedné přímce, nicméně leží v úzkém pásu. V takovém případě může střed kružnice vyjít blízko bodu x_0 což způsobí při malých výchylných vstupních dat (posuv jednoho z bodů) velké výchylné výstupních dat (velké změny směru normály).

Zajímavým aspektem metody je fakt, že normála kratšího z ramen získává větší podíl na normále vrcholu, jde tedy o přímý protiklad metodám založeným na přímé úměře váhy a délky ramena/plochy trojúhelníka.

Algoritmická složitost předložené metody závisí pouze na počtu testovaných vrcholů, proto se jedná o složitost $O(n)$ v nejhorším i očekávaném případě.

2.4.2 E3 případ

V E3 odvodil postup v [4] Nelson Max. Matematickým odvozováním z principu zřejmého z E2 odvodil novou váhovou funkci aplikovanou potom v metodě M3. [3] uvádí že Maxův postup má opodstatnění pouze pro objekty vepsané do sférických tvarů, u kterých dosahuje mimořádně kvalitních výsledků. Bohužel se mi dosud zdroj [4] nepodařilo v plném textu získat, proto ponechávám E3 případ této metody otevřený.

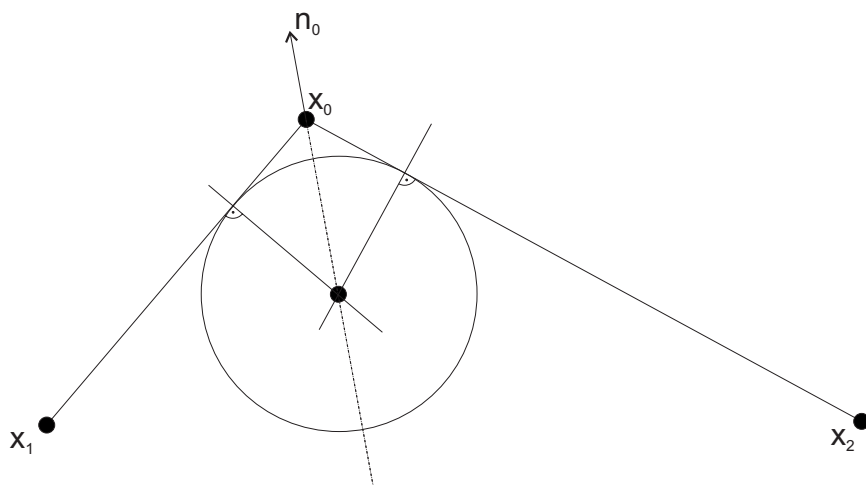
Je-li výsledkem metody pouze nová váhová funkce, potom má E3 případ metody M4 stejnou algoritmickou složitost jako metoda M3. Numerická stabilita metody může být ovlivněna výpočtem váhové funkce.

2.5 Metoda M5 (Metoda vrcholového úhlu)

Myšlenka: Vrchol u něhož konstruujeme normálu je možno chápat jako vrchol minimálního trojúhelníka (E2) nebo kužele (E3) do něhož se „vejdu“ všechny hrany z vrcholu vycházející. Normála takového tělesa pak může být určena směrem osy vrcholového úhlu.

2.5.1 E2 případ

V E2 je konstrukce prakticky totožná s metodou M1, pouze postup a důvody pro něj jsou odlišné.



¹ obdoba problému planárního polygonu – tři body se přesně v jedné přímce nenacházejí prakticky nikdy

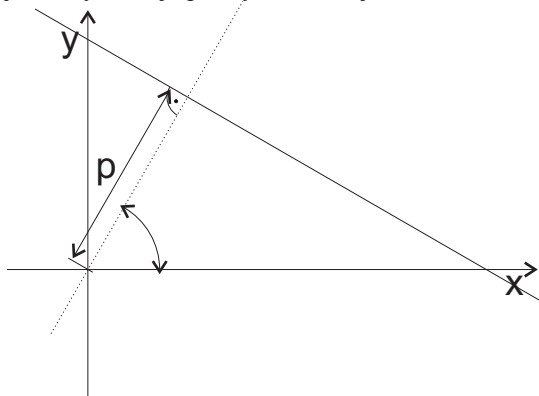
Normála je zkonstruována přímo jako osa vrcholového úhlu vrcholu x_0 . Metoda úzce souvisí s vepsanou kružnicí, která se však dotýká pouze dvou ramen (jak naznačuje obrázek), její střed se tedy nachází na ose vrcholového úhlu a její poloměr nemá na normálu žádný vliv.

Pro implementaci je vhodné zavést co nejpřímochařejší metodu výpočtu osy úhlu sevřeného dvěma přímkami. Takovou metodou může být:

Vyjádření obou přímek v normálovém tvaru, tj.

$$x \cos \beta + y \sin \beta - p = 0$$

jehož význam je patrný z následujícího obrázku



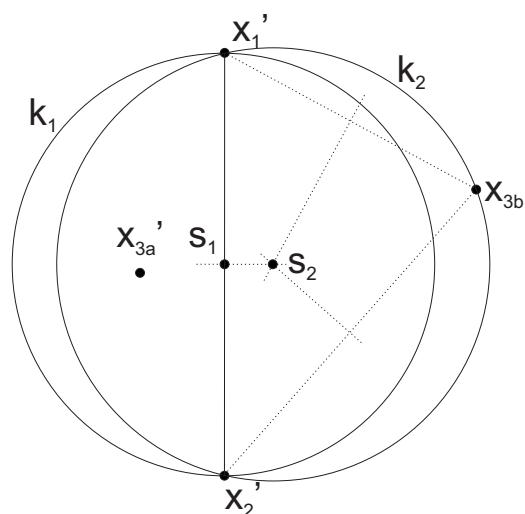
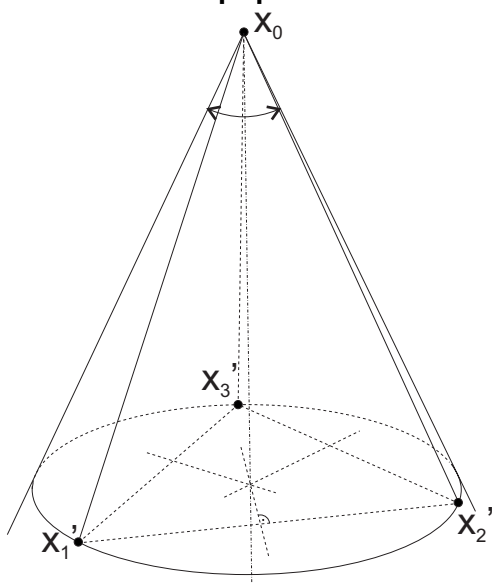
Při takovémto vyjádření můžeme rovnou psát tvar rovnice osy úhlů sevřených přímkami:

$$x(\cos \beta_1 \pm \cos \beta_2) + y(\sin \beta_1 \pm \sin \beta_2) - (p_1 \pm p_2) = 0$$

z něhož volbou znaménka získáme přímo dvě rovnice přímek.

Algoritmická složitost této metody je v 2D případě lineární (doba výpočtu závisí lineárně na počtu vrcholů), samotný postup hledání osy úhlu je numericky stabilní, numerickou stabilitu určení normálového tvaru rovnic přímek bude nutno ověřit.

2.5.2 E3 případ



V E3 je třeba uzavřít ramena do kuželu a určit jeho vrcholový úhel, resp. jeho osu. Obrázek ukazuje minimální případ tohoto problému, totiž stav kdy z vrcholu vycházejí právě tři hrany. Ani v takovém případě však není snadné určit minimální kužel.

Situace se v zásadě dělí na dvě eventuality:

- a) koule k opsaná některým dvěma z bodů x_{i1}' a x_{i2}' , tj.

$$S = \frac{x_{i1}' + x_{i2}'}{2}$$

a s poloměrem právě rovným jedné polovině vzdálenosti bodů x_{i1}' a x_{i2}' obsahuje třetí bod x_i' . Potom středem této koule rovněž prochází osa hledaného kužele a je tím (spolu s bodem x_0) plně určena.

- b) koule opsaná (podle případu a) kterýmkoli dvěma bodům nikdy neobsahuje třetí bod. Potom je nutno zkonstruovat trojúhelník ze všech tří bodů a nalézt průsečík os jeho stran. Ten je zároveň středem kružnice opsané tomuto trojúhelníku a s přihlédnutím k faktu že všechny hrany x_0x_i jsou stejně dlouhé je i středem základny hledaného kužele a tudíž je jím určena osa hledaného kužele.

Pro obecný případ se zdá být možné konstruovat minimální kužel podobně následovně:

- 1) nalezneme navzájem nejvzdálenější body z množiny bodů x_i' a nazveme je x_{i1}' a x_{i2}' .
- 2) určíme střed jejich spojnice
- 3) určíme bod nejvzdálenější od nalezeného středu spojnice a nazveme jej x_{i3}' .
- 4) Je-li vrcholový úhel trojúhelníka $x_{i1}'x_{i2}'x_{i3}'$ u bodu x_{i3}' menší nebo roven 90° pak se střed základny hledaného jehlanu nachází ve středu spojnice bodů x_{i1}' a x_{i2}' .
- 5) Je-li vrcholový úhel trojúhelníka $x_{i1}'x_{i2}'x_{i3}'$ u bodu x_{i3}' větší než 90° pak se střed základny hledaného jehlanu nachází na průsečíku os stran trojúhelníka $x_{i1}'x_{i2}'x_{i3}'$.

Metodě lze vytknout několik nedostatků, především:

- Bere v potaz vždy pouze 2-3 hrany, ostatní nemají na výsledek žádný vliv (minimální kužel je určen právě tímto počtem hran)
- Vyžaduje vyhledání dvou vzájemně nejvzdálenějších bodů z množiny, což může být časově náročné (možná se jedná o problém zavedeného algoritmu)

Algoritmická složitost metody závisí lineárně na počtu zkoumaných vrcholů a kvadraticky na počtu hran vycházejících z vrcholu (v nejhorším případě jich může být n), proto je nejhorší složitost této metody $O(n^3)$, obvykle je však počet hran vycházejících z jednoho vrcholu malý a v rámci úlohy jej lze považovat za konstantní, proto je možno očekávanou složitost určit jako $O(n)$.

Numerická stabilita algoritmu není příliš dobrá, během výpočtu se určují hodnoty úhlů (goniometrické funkce) a vzájemně porovnávají vzdálenosti bodů.

Ideou pro rozpracování zůstává možnost použít místo kružnicové základny základnu eliptickou, čímž by se zvýšil počet participujících ramen, nicméně přínos takového snažení se zdá být ve světle uvedených faktů sporný.

2.6 Další metody

Existuje množství dalších metod aproximace normál, většina z nich však vyžaduje další znalosti o datech, například využívají znalost aproximace gradientu volumetrických dat pro určení normály k izoplochám apod. Tyto metody jsou však většinou poměrně úzce specializované a proto se jimi v tomto materiálu nebudeme zabývat.

3 Metody testování

3.1 Testování přesnosti

Testování přesnosti má většinou smysl pouze pro testování směru, protože některé metody nijak neurčují velikost normály. Chybu se zdá být vhodné určovat jako úhlovou odchylku od přesné hodnoty.

3.1.1 E2 Příklad

Pro testování ve E2 navrhuji testovat proti přesně vypočteným normálám syntetických objektů. Chybu v takovémto případě můžeme určit jako

$$E = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i}{N}$$

kde α je úhel mezi přesnou a vypočtenou normálou. Chyba je tedy průměrnou úhlovou odchylkou normál.

Vzorkování objektu je možno zavést pravidelné či nepravidelné, obojí s různou hustotou. Bylo by zřejmě vhodné testovat na několika případech aby bylo možno alespoň intuitivně odlišit jaké množství informace o normálách bylo ztraceno při vzorkování.

Jako vhodné objekty vidím elipsu, u níž je možno měnit kromě hustoty vzorkování také excentricitu a zobrazit závislost na ní, popř. v trojrozměrném grafu závislost na excentricitě i hustotě vzorkování.

V případě elipsy by mohl poskytnout zajímavé informace test závislosti chyby na poměru délek ramen.

Druhým testovacím objektem by pak mohla být netriviální analytická křivka, její předpis bude zřejmě vhodnější upřesnit až při implementaci.

3.1.2 E3 případ

Rovněž v E3 se nejvhodnější metodou zdá být určení průměrné úhlové odchylky od přesné hodnoty. Otevírají se však širší možnosti specifikace vzorkovací sítě, u níž je možno předem stanovit

- hustotu
- pravidelnost rozložení vrcholů
- pravidelnost rozložení hran

Pro testování se opět vhodnými objekty zdají být elipsoid (závislost na excentricitě) a plocha zadaná netriviální funkcí typu

$$y = f(x, z)$$

pro které je možno stanovit normálu v kterémkoli bodě přesně z parciálních derivací.

3.2 Testování numerické stability

Pro testování numerické stability je možno zavést postup známý z Numerických metod, totiž zavedení náhodné chyby známé maximální velikosti do vstupních dat a sledování chování dat výstupních.

Sledovat budeme

- průměrnou odchylku od výsledku z dat nezatížených umělou chybou (při zavedení náhodně velké chyby by měla být průměrná odchylka nulová)
- průměrnou **velikost** odchylky
- **maximální** nalezenou odchylku ve výstupních datech

3.3 Testování rychlosti

Pro testování rychlosti mohou být použity implementace běžící na stejných datech, pro než bude na referenčním stroji měřena doba běhu. Pro tento postup je vhodné v prostředí Windows zavést vícevláknové aplikace, pro než se dobře měří uživatelský čas který dané vlákno spotřebovalo a měření není zatíženo chybou způsobenou zpracováváním dalších úloh na pozadí (které je v moderních operačních systémech prakticky nevyhnutelné). Získané výsledky je vhodné vynášet mj. do grafu s logaritmickými měřítky, čímž můžeme získat představu řádové složitosti úlohy.

4 Použitá literatura

- [1] Gouraud, H.: *Continuous Shading of Curved Surfaces*, IEEE Transactions on Computers, Vol. 20, No. 6, pp. 623-629, June 1971
- [2] Hill, F. S.: *Computer graphics usány OpenGL*, Upper Saddle River: Prentice Hall, 2001
- [3] Jirka, T.: *Vertex Normal Computation*, research paper, zatím nevydán
- [4] **Max, N**: *Weights for computing verte normals from facet normals*, Journal of Graphics Tools, 4(2):1-6, 1999